

## Olimpiada Națională de Matematică

### Etapa Locală – Ilfov

#### Clasa a VII - a

#### BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

- Nu se acorda puncte din oficiu.
- Pentru orice soluție corectă, diferită de cea din barem, se acorda punctajul corespunzător.
- Fiecare exercițiu este punctat de la 0 la 7.

1. Se dau numerele reale  $x$ ;  $y$ ;  $z$  direct proporționale cu 2; 3; 4. Știind că media lor aritmetică este egală cu rezultatul calculului  $\frac{1}{3} \cdot \left[ 5 + \sqrt{2 \cdot \left( \frac{1}{0,3(7)} : \frac{1}{340} - \frac{1}{0,01} \right)} \right]$ , să se calculeze media geometrică a numerelor  $x$  și  $y$ .

$$\{x; y; z\} \text{ d.p. } \{2; 3; 4\}$$

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = k$$

$$x = 2k ; y = 3k; z = 4k \dots\dots\dots 1p$$

$$\frac{1}{3} \cdot \left[ 5 + \sqrt{2 \cdot \left( \frac{1}{0,3(7)} : \frac{1}{340} - \frac{1}{0,01} \right)} \right] = \frac{1}{3} \cdot \left[ 5 + \sqrt{2 \cdot \left( \frac{\frac{1}{34}}{90} : \frac{1}{340} - \frac{1}{\frac{1}{100}} \right)} \right] \dots\dots\dots 1p$$

$$= 15 \dots\dots\dots 1p$$

$$\frac{x+y+z}{3} = 15 \Rightarrow x+y+z=45 \Rightarrow k=5 \dots\dots\dots 1p$$

$$x=10; y=15; \dots\dots\dots 1p$$

$$m_g = \sqrt{xy} = \sqrt{10 \cdot 15} = 5\sqrt{6} \dots\dots\dots 2p$$

2. Determinați toate perechile  $(x; y)$  de numere naturale nenule, prime între ele, cu

$x > y$ , pentru care  $\sqrt{\frac{7y^2}{x^2-xy}}$  este număr natural.

$$\sqrt{\frac{7y^2}{x^2-xy}} = |y| \cdot \sqrt{\frac{7}{x^2-xy}} = y \cdot \sqrt{\frac{7}{x(x-y)}} \dots\dots\dots 2p$$

$$y > 0$$

$$\sqrt{\frac{7y^2}{x^2-xy}} \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{7}{x(x-y)} \text{ este pătrat perfect } \dots\dots\dots 2p$$

$$x(x-y) \in D_7 = \{1; 7\} \dots\dots\dots 1p$$

Convine  $(x; y) = (7; 6)$  .....2p

3. În paralelogramul  $ABCD$ , cu  $AB \perp AC$ ,  $AC \cap BD = \{O\}$ , notăm cu  $P$  simetricul punctului  $B$  față de dreapta  $AC$  și cu  $Q$  simetricul punctului  $P$  față de mijlocul segmentului  $AC$ .

Demonstrați că patrulaterul  $ABQD$  este trapez dreptunghic.

$$P = \text{sim}_{AC} B \Rightarrow AB \equiv AP \text{ și } AB \perp AC$$

$$Q = \text{sim}_O P \Rightarrow OP \equiv OQ \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{APCQ paralelogram} \dots 1p$$

$$ABCD \text{ paralelogram} \Rightarrow BO = OD \text{ și } AO = OC$$

$$\Rightarrow AP \parallel CQ \text{ și } PC \parallel AQ$$

$$\left. \begin{array}{l} AP \parallel CQ \Rightarrow AB \parallel CQ \\ \text{Dar } AB \parallel CD \end{array} \right\} \text{punctele } C, Q, D \text{ coliniare} \dots 2p$$

$$APCQ \text{ paralelogram} \Rightarrow AP = CQ \Rightarrow AP \equiv AB \equiv CD \Rightarrow C \text{ mijlocul lui } QD.$$

$$AB \parallel CQ \text{ și } AB = CQ \Rightarrow \text{patrulaterul } ABQC \text{ paralelogram} \dots 1p$$

$$AB \parallel CQ \text{ și } C, Q, D \text{ coliniare} \Rightarrow AB \parallel QD$$

$$\text{Dacă } AD \parallel BQ \Rightarrow BQ, BC \text{ ar coincide, ceea ce contrazice coliniaritatea punctelor } D, C, Q \\ \Rightarrow AD \nparallel BQ \dots 1p$$

$$\left. \begin{array}{l} AB \parallel QD \\ AD \nparallel BQ \end{array} \right\} \Rightarrow ABQD \text{ trapez} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{ABQD trapez dreptunghic} \dots 2p$$

$$\left. \begin{array}{l} AC \parallel BQ \\ AB \perp AC \end{array} \right\} \Rightarrow AB \perp BQ$$

4. În triunghiul dreptunghic  $ABC$ , cu  $\angle A = 90^\circ$  și  $\angle B = 60^\circ$ , bisectoarea unghiului  $B$  intersectează mediana  $AM$  în  $H$  și cateta  $AC$  în  $P$ . Dacă  $N$  este centrul de greutate al triunghiului  $ABM$ ,  $Q$  este simetricul punctului  $N$  față de  $BC$  și  $R$  este simetricul punctului  $B$  față de  $MQ$ , arătați că:

a) (4p)  $PMQB$  este trapez isoscel;

b) (3p)  $A, N, Q, R$  sunt patru puncte coliniare.

$$a) \Delta ABM \text{ isoscel cu } \angle B = 60^\circ \Rightarrow \Delta ABM \text{ echilateral iar } BN \text{ este bisectoare și înălțime} \\ \text{astfel încât } BH \text{ mediatoarea lui } AM. \dots 1p$$

$$D \text{ mijlocul lui } BM, N \text{ centru de greutate în } \Delta ABM \Rightarrow ND = QD = \frac{AD}{3}$$

$$MNBQ \text{ paralelogram și } NQ \perp BM \Rightarrow MNBQ \text{ romb} \Rightarrow MQ \parallel BN \text{ și } BQ \equiv MN \dots 1p$$

$\angle PAM = \angle MAN (=30^\circ)$  și  $AM \perp PN \Rightarrow AP \equiv AN$  dar  $AN \equiv NM$ .

$PA \equiv MN$  ,  $PA \parallel AB$  și  $PA \perp AB$

APMN romb ( paralelogram cu diagonalele perpendiculare).....1p

$AP \equiv PM$  și  $AP \equiv MN$

$MN \equiv BQ$

$MQ \parallel BP$

$PM = BQ \Rightarrow PMQB$  trapez isoscel .....1p

b) MQ mediatoarea laturii BR  $\Rightarrow MB \equiv MR \Rightarrow MR \equiv MA \equiv AB$

$\angle RMQ = \angle QMB = 30^\circ \Rightarrow \angle RMB = \angle MBA = 60^\circ \Rightarrow MR \parallel AB$

$\Rightarrow RMAB$  paralelogram , cu D mijlocul lui BM .....2p

$N, Q \in AD \Rightarrow A, N, D, Q, R$  coliniare .....1p